

# Macroeconomía Internacional

---

Francisco Roldán  
IMF

November 2024

The views expressed herein are those of the authors and should not be attributed to the IMF, its Executive Board, or its management.

# Deuda de largo plazo

## Cupones con decaimiento exponencial

- Emito  $b$  en  $t$
- Pago  $\kappa$  en  $t + 1$  y sobrevive  $(1 - \rho)b$  para el futuro
- Pago  $\kappa(1 - \rho)$  en  $t + 2$  y sobrevive  $(1 - \rho)^2 b$  para el futuro
- ...
- Pago  $\kappa(1 - \rho)^{s-1}$  en  $t + s$

## Total de pagos prometidos

$$q^* = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} (1-\rho)^{s-1}$$

# Deuda de largo plazo

## Cupones con decaimiento exponencial

- Emito  $b$  en  $t$
- Pago  $\kappa$  en  $t + 1$  y sobrevive  $(1 - \rho)b$  para el futuro
- Pago  $\kappa(1 - \rho)$  en  $t + 2$  y sobrevive  $(1 - \rho)^2b$  para el futuro
- ...
- Pago  $\kappa(1 - \rho)^{s-1}$  en  $t + s$

## Total de pagos prometidos

$$q^* = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa(1-\rho)^s$$

$$= \frac{\kappa(1-\rho)}{r(1+r)}$$

# Deuda de largo plazo

## Cupones con decaimiento exponencial

- Emito  $b$  en  $t$
- Pago  $\kappa$  en  $t + 1$  y sobrevive  $(1 - \rho)b$  para el futuro
- Pago  $\kappa(1 - \rho)$  en  $t + 2$  y sobrevive  $(1 - \rho)^2b$  para el futuro
- ...
- Pago  $\kappa(1 - \rho)^{s-1}$  en  $t + s$

## Total de pagos prometidos

$$q^* = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^s$$

# Deuda de largo plazo

## Cupones con decaimiento exponencial

- Emito  $b$  en  $t$
- Pago  $\kappa$  en  $t + 1$  y sobrevive  $(1 - \rho)b$  para el futuro
- Pago  $\kappa(1 - \rho)$  en  $t + 2$  y sobrevive  $(1 - \rho)^2b$  para el futuro
- ...
- Pago  $\kappa(1 - \rho)^{s-1}$  en  $t + s$

## Total de pagos prometidos

$$\begin{aligned}q^* &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^s \\ &= \frac{\kappa}{1+r} \frac{1}{1 - \frac{1-\rho}{1+r}}\end{aligned}$$

# Deuda de largo plazo

## Cupones con decaimiento exponencial

- Emito  $b$  en  $t$
- Pago  $\kappa$  en  $t + 1$  y sobrevive  $(1 - \rho)b$  para el futuro
- Pago  $\kappa(1 - \rho)$  en  $t + 2$  y sobrevive  $(1 - \rho)^2b$  para el futuro
- ...
- Pago  $\kappa(1 - \rho)^{s-1}$  en  $t + s$

## Total de pagos prometidos

$$\begin{aligned}q^* &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^s \\ &= \frac{\kappa}{1+r} \frac{1}{1 - \frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa \frac{1}{1+r - (1-\rho)}\end{aligned}$$

# Deuda de largo plazo

## Cupones con decaimiento exponencial

- Emito  $b$  en  $t$
- Pago  $\kappa$  en  $t + 1$  y sobrevive  $(1 - \rho)b$  para el futuro
- Pago  $\kappa(1 - \rho)$  en  $t + 2$  y sobrevive  $(1 - \rho)^2b$  para el futuro
- ...
- Pago  $\kappa(1 - \rho)^{s-1}$  en  $t + s$

## Total de pagos prometidos

$$\begin{aligned}q^* &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^s \\ &= \frac{\kappa}{1+r} \frac{1}{1 - \frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa \frac{1}{1+r - (1-\rho)} = \frac{\kappa}{r+\rho}\end{aligned}$$

# Deuda de largo plazo

## Cupones con decaimiento exponencial

- Emito  $b$  en  $t$
- Pago  $\kappa$  en  $t + 1$  y sobrevive  $(1 - \rho)b$  para el futuro
- Pago  $\kappa(1 - \rho)$  en  $t + 2$  y sobrevive  $(1 - \rho)^2b$  para el futuro
- ...
- Pago  $\kappa(1 - \rho)^{s-1}$  en  $t + s$

## Total de pagos prometidos

$$\begin{aligned}q^* &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^s \\ &= \frac{\kappa}{1+r} \frac{1}{1 - \frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa \frac{1}{1+r - (1-\rho)} = \frac{\kappa}{r+\rho}\end{aligned}$$



# Deuda de largo plazo

## Cupones con decaimiento exponencial

- Emito  $b$  en  $t$
- Pago  $\kappa$  en  $t + 1$  y sobrevive  $(1 - \rho)b$  para el futuro
- Pago  $\kappa(1 - \rho)$  en  $t + 2$  y sobrevive  $(1 - \rho)^2b$  para el futuro
- ...
- Pago  $\kappa(1 - \rho)^{s-1}$  en  $t + s$

## Total de pagos prometidos

$$\begin{aligned} q^* &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^s \\ &= \frac{\kappa}{1+r} \frac{1}{1 - \frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa \frac{1}{1+r - (1-\rho)} = \frac{\kappa}{r + \rho} \end{aligned}$$

# Deuda de largo plazo bellmanizada

## Recursivamente

- Hoy compro la deuda a precio  $q^*$
- Mañana cobro cupón  $\kappa$ , revendo la deuda que queda  $(1 - \rho)$  a precio  $q^*$ .

$$q^* = \frac{1}{1+r} (\kappa + (1-\rho)q^*)$$

$$q^*(1+r - (1-\rho)) = \kappa$$

$$q^* = \frac{\kappa}{r+\rho}$$

- Deuda emitida en  $t - s$  **sustituye perfectamente**  $(1 - \rho)^s$  deuda emitida en  $t$

# Deuda de largo plazo bellmanizada

## Recursivamente

- Hoy compro la deuda a precio  $q^*$
- Mañana cobro cupón  $\kappa$ , revendo la deuda que queda  $(1 - \rho)$  a precio  $q^*$ .

$$q^* = \frac{1}{1+r} (\kappa + (1-\rho)q^*)$$

$$q^*(1+r-(1-\rho)) = \kappa$$

$$q^* = \frac{\kappa}{r+\rho}$$

- Deuda emitida en  $t - s$  **sustituye perfectamente**  $(1 - \rho)^s$  deuda emitida en  $t$

# Deuda de largo plazo bellmanizada

## Recursivamente

- Hoy compro la deuda a precio  $q^*$
- Mañana cobro cupón  $\kappa$ , revendo la deuda que queda  $(1 - \rho)$  a precio  $q^*$ .

$$q^* = \frac{1}{1+r} (\kappa + (1-\rho)q^*)$$

$$q^*(1+r - (1-\rho)) = \kappa$$

$$q^* = \frac{\kappa}{r+\rho}$$

- Deuda emitida en  $t - s$  **sustituye perfectamente**  $(1 - \rho)^s$  deuda emitida en  $t$

# Deuda de largo plazo bellmanizada

## Recursivamente

- Hoy compro la deuda a precio  $q^*$
- Mañana cobro cupón  $\kappa$ , revendo la deuda que queda  $(1 - \rho)$  a precio  $q^*$ .

$$q^* = \frac{1}{1+r} (\kappa + (1-\rho)q^*)$$

$$q^*(1+r-(1-\rho)) = \kappa$$

$$q^* = \frac{\kappa}{r+\rho}$$

- Deuda emitida en  $t - s$  **sustituye perfectamente**  $(1 - \rho)^s$  deuda emitida en  $t$

# Haircuts parciales

---

Default significa

- Suspensión del pago de cupones  $\kappa$  (sí o sí requiere deuda de largo plazo)
- Fracción  $\bar{h}$  de la deuda es destruida (se puede hacer con deuda de corto también...)

## Default: problema del deudor

Con deuda larga, si debo  $b$  y emito  $x$  deuda nueva,

$$c + \underbrace{\kappa b}_{\text{cupones}} = y + \underbrace{qx}_{\text{deuda nueva}}$$
$$b' = \underbrace{(1 - \rho)b}_{\text{deuda vieja}} + \underbrace{x}_{\text{deuda nueva}}$$

o, si elijo la deuda de mañana directamente,

$$c + \kappa b = y + q(b' - (1 - \rho)b)$$

- Ventaja de la forma 2:  $q$  naturalmente es una función de  $b'$  y no de  $x$

## Default: problema del deudor

Con deuda larga, si debo  $b$  y emito  $x$  deuda nueva,

$$c + \underbrace{\kappa b}_{\text{cupones}} = y + \underbrace{qx}_{\text{deuda nueva}}$$
$$b' = \underbrace{(1 - \rho)b}_{\text{deuda vieja}} + \underbrace{x}_{\text{deuda nueva}}$$

o, si elijo la deuda de mañana directamente,

$$c + \kappa b = y + q(b' - (1 - \rho)b)$$

- Ventaja de la forma 2:  $q$  naturalmente es una función de  $b'$  y no de  $x$



## Default: problema del deudor

Con deuda larga, si debo  $b$  y emito  $x$  deuda nueva,

$$c + \underbrace{\kappa b}_{\text{cupones}} = y + \underbrace{qx}_{\text{deuda nueva}}$$
$$b' = \underbrace{(1 - \rho)b}_{\text{deuda vieja}} + \underbrace{x}_{\text{deuda nueva}}$$

o, si elijo la deuda de mañana directamente,

$$c + \kappa b = y + q(b' - (1 - \rho)b)$$

- Ventaja de la forma 2:  $q$  naturalmente es una función de  $b'$  y no de  $x$

## Default: ecuaciones de Bellman

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(b, y) &= \max \{v^R(b, y) + \epsilon^R, v^D((1 - \bar{h})b, y) + \epsilon^D\} \\ &= \chi \log [\exp(v^R(b, y)/\chi) + \exp(v^D((1 - \bar{h})b, y)/\chi)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v^R(b, y) &= \max_{c, b'} u(c) + \beta \mathbb{E} [\mathcal{V}(b', y') | y] \\ &\text{sujeto a } c + \kappa b = y + q(b', y) (b' - (1 - \rho)b)\end{aligned}$$

$$v^D(b, y) = u(h(y)) + \beta \mathbb{E} [\psi \mathcal{V}(b, y') + (1 - \psi)v^D(b, y') | y]$$

## Default: ecuaciones de Bellman

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(b, y) &= \max \{v^R(b, y) + \epsilon^R, v^D((1 - \bar{h})b, y) + \epsilon^D\} \\ &= \chi \log [\exp(v^R(b, y)/\chi) + \exp(v^D((1 - \bar{h})b, y)/\chi)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v^R(b, y) &= \max_{c, b'} u(c) + \beta \mathbb{E} [\mathcal{V}(b', y') | y] \\ &\text{sujeto a } c + \kappa b = y + q(b', y) (b' - (1 - \rho)b)\end{aligned}$$

$$v^D(b, y) = u(h(y)) + \beta \mathbb{E} [\psi \mathcal{V}(b, y') + (1 - \psi)v^D(b, y') | y]$$

## Default: ecuaciones de Bellman

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(b, y) &= \max \{v^R(b, y) + \epsilon^R, v^D((1 - \bar{h})b, y) + \epsilon^D\} \\ &= \chi \log [\exp(v^R(b, y)/\chi) + \exp(v^D((1 - \bar{h})b, y)/\chi)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v^R(b, y) &= \max_{c, b'} u(c) + \beta \mathbb{E} [\mathcal{V}(b', y') | y] \\ &\text{sujeto a } c + \kappa b = y + q(b', y) (b' - (1 - \rho)b)\end{aligned}$$

$$v^D(b, y) = u(h(y)) + \beta \mathbb{E} [\psi \mathcal{V}(b, y') + (1 - \psi) v^D(b, y') | y]$$

## Default: problema del acreedor

### Precio de la deuda

- Si mañana no hay default cobro
  - $\kappa$  del cupón
  - $(1 - \rho)q'$  de la deuda no depreciada
    - $q' = q(b'', y')$
- Si hay default me quedo con  $(1 - \bar{h})$  bonos defaulteados

$$R(b, y) = \kappa + (1 - \rho)q(g_b(b, y), y)$$

$$q(b', y) = \frac{1}{1+r} \mathbb{E} [(1 - \mathbb{1}_D(b', y'))R(b', y') + \mathbb{1}_D(b', y')(1 - \bar{h})q_D((1 - \bar{h})b', y')]$$

$$q_D(b', y) = \frac{1}{1+r} \mathbb{E} [\psi ((1 - \mathbb{1}_D(b', y'))R(b', y') + \mathbb{1}_D(b', y')(1 - \bar{h})q_D((1 - \bar{h})b', y')) + (1 - \psi)q_D(b', y')]$$

## Default: problema del acreedor

### Precio de la deuda

- Si mañana no hay default cobro
  - $\kappa$  del cupón
  - $(1 - \rho)q'$  de la deuda no depreciada
    - $q' = q(b'', y')$
- Si hay default me quedo con  $(1 - \bar{h})$  bonos defaulteados

$$R(b, y) = \kappa + (1 - \rho)q(g_b(b, y), y)$$

$$q(b', y) = \frac{1}{1+r} \mathbb{E} [(1 - \mathbb{1}_D(b', y'))R(b', y') + \mathbb{1}_D(b', y')(1 - \bar{h})q_D((1 - \bar{h})b', y')]$$

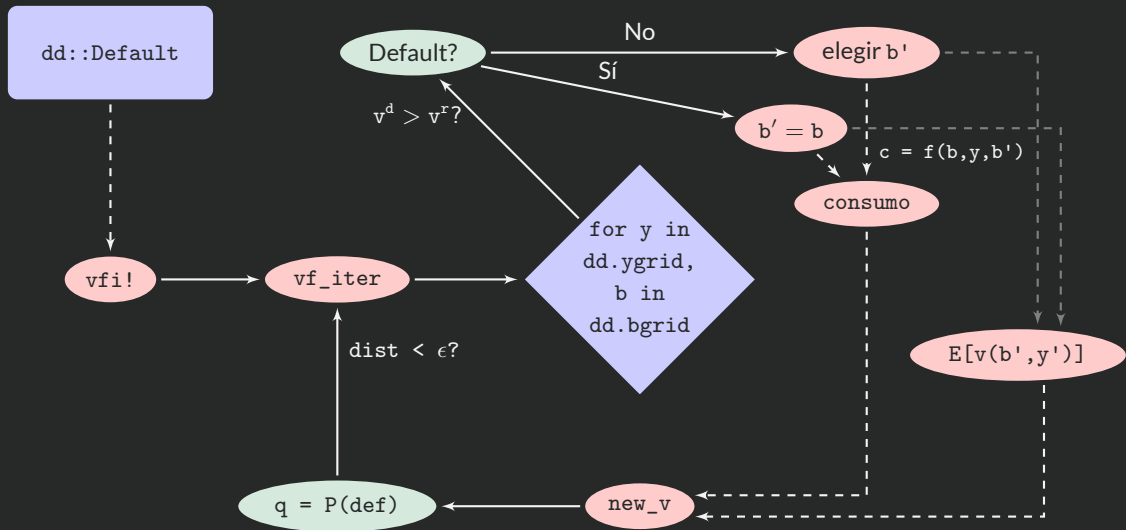
$$q_D(b', y) = \frac{1}{1+r} \mathbb{E} [\psi ((1 - \mathbb{1}_D(b', y'))R(b', y') + \mathbb{1}_D(b', y')(1 - \bar{h})q_D((1 - \bar{h})b', y')) + (1 - \psi)q_D(b', y')]$$

# Estrategias de resolución

---

- Estilo **equilibrio general**
  - Dadas funciones  $q(b', y), q_D(b', y)$ , iterar sobre la función de valor
  - Actualizar  $q, q_D$  usando las políticas de default
  - Iterar
  
- Estilo **teoría de juegos**
  - Inicializar  $v, q$  en un período  $T$  lejano
  - Encontrar  $q$  consistentes con la política implícita en  $v$  (una vez!)
  - Actualizar  $v$  dado  $q$
  - Iterar 'hacia el pasado' hasta convergencia
  
- ... Equilibrio recursivo (perfecto de Markov) con estrategias indexadas por  $(b, y, d)$

# Pseudo-código





def\_simul.jl

# Pseudo-simul

## Necesitamos

- En cada período  $t$ 
  - Entro sabiendo  $b_t, y_t$  y si estoy en default  $d_t$
  - Con las funciones de política, puedo calcular **emisión**  $b'_t$  y **consumo**  $c_t$
  - Si estoy en default  $b'_t = b_t$ , si no, puedo calcular  $q(b'_t, y_t)$
- Entre  $t$  y  $t + 1$ 
  - Realizar dos **shocks**  $\epsilon_{t+1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$  y  $\xi_{t+1} \sim \mathcal{U}(0, 1)$
  - Ahora,  $\log y_{t+1} = \rho_y \log y_t + \sigma_y \epsilon_{t+1}$
  - Defaulteo en  $t + 1$  si  $\xi_{t+1} < \mathbb{P}(d_{t+1}) = d(b'_{t+1}, y_{t+1})$
  - Si estaba en repago en  $t$  pero voy a defaultear en  $t + 1$ ,  $b_{t+1} = (1 - \bar{h})b'_t$ , si no,  $b_{t+1} = b'_t$
- Para manejar todo esto
  - Un vector para guardar cada serie de tiempo
  - Interpoladores para todas las reglas de decisión