Macroeconomía Internacional Cuantitativa

Francisco Roldán[*]

October 2024

a entregar antes de la clase del 13 de noviembre

1. Fluctuación de ingresos

Al agregar un proceso estocástico para $\{y_t\}_t$, obtenemos un problema de fluctuación de ingresos con ecuación de Bellman

$$v(k, y) = \max_{k' \geq \bar{k}} u(y + k(1 + r) - k') + \beta \mathbb{E}\left[v(k', y') \mid y\right]$$

Límite de deuda natural El límite de deuda natural $\underline{k}$ es el máximo nivel de deuda (menor nivel de capital) que es 'pagable' por el agente (o sea, que si mañana se endeuda otra vez al máximo le alcanza justo, haciendo $c = 0$ para pagar la deuda vieja).

$$\begin{aligned} \underline{k} &= \min_{y'} y' + (1 + r)\underline{k} \\ &= \min_{y'} -\frac{y'}{r} \end{aligned}$$

Fijate que como tenés que hacer $c = 0$ para nada más pagar los intereses de $\underline{k}$, tener que elegir $k \geq \underline{k}$ nunca es una restricción que muerde si las preferencias satisfacen una condición de Inada y la utilidad marginal del consumo se vuelve alta cuando $c \to 0$ (por eso se llama el límite natural).

Igual que charlamos en clase, si uno realmente se cree que $\log y'$ tiene distribución normal (condicional en y), entonces el mínimo y' es 0 y el límite de deuda natural también. Pero si vamos a discretizar la grilla de y (o si pasa alguna otra cosa que nos haga pensar que y está acotado por abajo lejos de 0), entonces el límite natural es un concepto útil.

[*]email: *froldan6@gmail.com*

2. Deuda sin default

En clase vimos el problema de un agente que enfrenta un ingreso y aleatorio que sigue una cadena de Markov y debe repagar sus deudas sí o sí,

$$v(b, y) = \max_{b' \leq \bar{b}} u(y - b + qb') + \beta \mathbb{E}\left[v(b', y') \mid y\right]$$

donde $\bar{b}$ es un límite de deuda arbitrario y $q = \frac{1}{1+r}$ es el factor de descuento de los acreedores.

2.1 *Funciones de consumo*

Elegir la forma de mostrar $c(b, y)$ en un modelo resuelto. Ideas posibles (pero no exhaustivo): b en el eje x, distintas líneas para distintos valores de y, usando un vector de `scatters`; curvas de nivel como función de (b, y) usando `contour` (Ojo que `contour` maneja la x y la y medio raro, lo que pongas en el eje z lo considera una matriz con lo cual la primera dimensión es el eje y y la segunda el eje x). Opcional: mostrame $c(b, y)/y$. Cómo cambia la propensión al consumo con el nivel de b?

2.2 *Estáticas comparadas*

Quiero entender el efecto de algunos parámetros sobre la propensión al ahorro. Vamos a mover q y la volatilidad del ingreso σ_y y graficar la función de consumo como función del ingreso y el parámetro que estemos moviendo, dejando la deuda en 0 (para no complicar el gráfico).

Modo sugerido

1. Fijar un vector $\mathcal{Q}$ para los valores de q (o un vector Σ para los valores de σ_y). Por ejemplo un `range` entre β y 1 con largo N_q (por ejemplo 10, si querés podés poner más puntos pero va a tardar más, pensá que tenemos que resolver un modelo cada vez).

2. Preparar un vector para guardar los `scatters` de largo N_q (haciendo `pv = Vector{AbstractTrace}(undef, Nq)` para que después lo pueda tomar `plot`).

3. Para cada $x \in \mathcal{Q}$:

   - Preparar un modelo `NoDefault` con $q = x$. Como nuestro constructor toma r y no q (y como $q = \frac{1}{1+r}$), tenés que usar una opción $r = 1/x - 1$.
   - Resolver el modelo
   - En el elemento correspondiente del vector pv, guardar el `scatter` de $g_c(0, y)$ contra y, para y en la grilla de posibles valores `ygrid` (acordate que el primer índice de la grilla de b es 0). Al crear estos `scatters`, podés usar la opción `name` para ir referenciando cuál es el valor de q en cada caso e ir armando la leyenda del gráfico.

- Podés elegir graficar $g_c(0, y)$ así como viene o $g_c(0, y)/y$ para ver la fracción del ingreso consumido o $g_c(0, y) - y$ para ver más claro cuándo te endeudás y cuánto.

4. Finalmente, usar `plot` sobre `pv` para mostrar todo junto. Cómo afectan las condiciones de crédito al consumo del agente, aún cuando no tiene deuda?

Repetir todos estos pasos para mover σ_y (por ejemplo entre 0.01 y 0.05 si el valor original es 0.025). *Nota*: fijate que este método de ir creando los `scatters` 'localmente' permite que cada uno de los gráficos tenga un eje x distinto, lo cual nos viene bien porque al cambiar σ_y va a cambiar la grilla `ygrid`. Deberías poder notarlo en el gráfico al poner todo junto.

2.3 *Robustness – opcional*

Podemos modificar el problema del agente introduciendo preferencias por robustez. En este caso tendríamos la siguiente ecuación de Bellman

$$v(b, y) = \max_{b'} u(y - b + qb') + \beta \mathbb{T}_\theta \left[v(b', y') \mid y \right]$$

donde como antes $\mathbb{T}_\theta(X) = -\frac{1}{\theta} \log \mathbb{E} \left[\exp(-\theta X) \right]$.

Para hacer funcionar esto podés agregar un argumento θ a `eval_value` que si $\theta > 0$ (o mayor que por ejemplo 10^{-4}) usa el operador $\mathbb{T}$ y si no usa el $\mathbb{E}$ común.

Mirando las reglas de decisión: Cómo cambia la función de consumo en proporción al ingreso $c(b, y)/y$ (la propensión marginal al consumo en equilibrio parcial)? Una forma posible de hacer esto (pero hay muchas) sería elegir un punto para y (o dos, uno bajo y uno alto, por ejemplo) y mostrar, como función de b, una línea que sea el $c(b, y)/y$ para el modelo original y otra para el modelo con robustez. Se parecen o no? En qué difieren? Se van separando en algún sentido?

Usando el simulador (que dice abajo): Cómo cambia la distribución de la deuda al aumentar θ? Cómo cambia la distribución de c/y (la propensión promedio al consumo)? Para esto, podés simular la economía un montón de períodos y calcular un histograma de los valores de b (o de los valores de c/y según el caso).

3. Deuda con default (Arellano)

En clase vimos el problema de un soberano que emite deuda defaulteable a un conjunto de inversores extranjeros. El soberano toma como dada una función $q(b', y)$, que dice a qué precio puede colocar una cantidad de deuda b' cuando el nivel de ingreso de hoy es y, y resuelve

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(b, y) &= \max \left\{ v^R(b, y) + \varepsilon_R, v^D(y) + \varepsilon_D \right\} \\
v^R(b, y) &= \max_{b'} u(y - b + q(b', y)b') + \beta \mathbb{E} \left[\mathcal{V}(b', y') \mid y \right] \\
v^D(y) &= u(h(y)) + \beta \mathbb{E} \left[\psi \mathcal{V}(0, y') + (1 - \psi) v^D(y') \mid y \right]
\end{aligned}$$

donde los shocks ε_i son *iid* entre sí y entre períodos con distribución de valor extremo tipo 1 con parámetro de escala χ, de modo que $\varepsilon_R - \varepsilon_D$ tiene distribución logística con parámetro χ. Esto da lugar a expresiones explícitas para la probabilidad de default *ex-post* $\mathcal{P}(b, y)$ y la función de valor

$$\mathcal{P}(b, y) = \frac{\exp(v^D(y)/\chi)}{\exp(v^R(b, y)/\chi) + \exp(v^D(y)/\chi)}$$
$$\mathcal{V}(b, y) = \chi \log\left(\exp(v^D(y)/\chi) + \exp(v^R(b, y)/\chi)\right)$$

Los acreedores extranjeros son neutrales al riesgo y descuentan el futuro a tasa $\frac{1}{1+r}$, así que para que estén dispuestos a comprar un bono, tiene que ser que el repago esperado descontado sea igual al precio de venta

$$q(b', y) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}\left[1 - d(b', y') \mid y\right] = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}\left[1 - \mathcal{P}(b', y') \mid y\right]$$

3.1 *Regiones de repago y default*

Usando un modelo resuelto con los parámetros por default, mostrame con un `contour` la probabilidad de default como función de y y b. Cuándo es más riesgosa la deuda?[1]

Opcional Qué pasa con la región de default cuando variás la paciencia del deudor β o el costo de default (por ejemplo variando Δ en el caso de costos lineales). Una forma de mostrar esto es, para cada modelo, como función de y, encontrar el nivel de deuda $b^\star(y)$ para el cual la probabilidad de default $\mathcal{P}(b, y)$ cruza 50% (podés usar `findfirst` sobre el vector `dd.prob[:,jy]` para dado y o interpolar y encontrarle un mínimo a la función $b \mapsto (\mathcal{P}(b, y) - 0.5)^2$). Una vez calculado todo esto, podés poner en el mismo gráfico las funciones $b^\star(y)$ que correspondan a cada modelo y comparar dónde están.

Muy opcional: podés también usar los gráficos de $\mathcal{V}$, v^R, v^D que te pido en 3.2 para entender mejor lo que está pasando (por ejemplo dónde se cruzan).

3.2 *Mecánica de los shocks de preferencias*

Para ver cómo χ afecta al equilibrio (además de a la resolución del modelo), vamos a resolver el mismo modelo con distintos valores de χ. En `arellano.jl` el constructor que yo escribí tiene por default $\chi = 0.01$. Te voy a pedir que resuelvas el modelo para $\chi \in \{0.0001, 0.1\}$.

Para cada resolución, en el mismo gráfico quiero ver las tres funciones de valor, $\mathcal{V}$, v^R, v^D, como función del nivel de deuda b.[2] Lo importante es que se crucen v^R y v^D cosa de que podamos ver el efecto del default

[1] No te olvides que `contour` invierte los ejes x e y. Para graficar $f(x, y)$ como que naturalmente identificamos el primer argumento con el eje horizontal, pero pensando en una matriz A_{xy}, la primera componente es el 'eje' vertical, como que `A[:,jy]` es un vector columna y `A[jx,:]` es una fila.

[2] Ojo, la función v^D no depende del nivel de deuda, así que para graficarla y hacer la comparación tenés dos opciones. Opción

(si $v^R > v^D$ en todo el gráfico, es que la opción de defaultear no vale nada). Para los parámetros que estamos usando, podés lograr eso fijando $y = 1$ (o sea, usando el índice de la grilla de y que tenga el valor más cercano a 1 posible, debería ser justo el medio de la grilla).

Podés poner los gráficos uno al lado del otro (variando χ) o rebuscártelas para poner toda la información en un solo gráfico. Pero quiero que notes dos cosas: primera, cómo cambia la relación entre $\mathcal{V}$ y v^R y v^D cuando χ se hace más grande, y por qué? Segunda, mirá los valores en el eje y. Los niveles son de utilidad así que no representan nada, pero es lo mismo cuánto es χ para el valor de este agente? Las v^R como v^D son iguales o distintas cuando cambiás χ? Por qué pasa eso?

3.3 *Cuántos defaults son por los precios?*

El gobierno en el modelo de default (y, capaz, en la realidad también) en muchos casos diría que terminó haciendo un default porque los precios eran desfavorables (o sea, que si le permitían hacer rollover de la deuda con términos más razonables sí habría podido pagar). Vamos a investigar un poco esta dinámica en el modelo que tenemos. Para esto, quiero que armes la siguiente solución fuera de expectativas racionales: hacé que el precio de los bonos sea consistente con que el gobierno siempre repague, y resolvé el modelo (permitiéndole al gobierno elegir si paga o no) pero enfrentando esos precios. Una sugerencia es armarte una función parecida a la `mpe!` pero que no haga el paso de actualizar los precios. Una vez hecho esto, dibujá la región de default del modelo original (con precios de equilibrio que reflejan la probabilidad de default) y la del modelo con estos otros precios. Son distintas, es una de las dos un subconjunto de la otra? Hay defaults que sólo ocurren porque enfrentás malos precios?

Nota Acá es muy útil usar las funciones $b^\star(y)$ del punto opcional 3.1.

Nota La semana que viene cuando tengamos código para simular el modelo también podemos preguntarnos qué proporción de defaults que ocurren en el equilibrio "completo" no habrían ocurrido en caso de que los spreads no hubieran aumentado, pero también la cantidad de deuda que el gobierno emite en cada caso.

1: meterte en la documentación de PlotlyJS y usar `shapes` para agregar una línea horizontal al gráfico. Opción 2: multiplicar $v^D(y)$ por un vector de unos del largo de `bgrid` para que te quede algo que puedas graficar como función de b.