Macroeconomía Internacional

Francisco Roldán
IMF

November 2025

Problema

- Elegir acciones $\{a_t\}_t$ para maximizar algún objetivo

$$v_0 = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(x_t, a_t) \right]$$

- Evolución del estado $F(x_{t+1} \mid x_t, a_t)$ se puede afectar con a_t
- Programación dinámica: $v(x) = \max_a U(x, a) + \beta \mathbb{E}\left[v(x')|x, a\right]$ ✓
- Qué pasa si la evolución del estado también depende de $\mathbb{E}_t\left[a_{t+1}\right]$?

Consistencia temporal

Problema

- Elegir acciones $\{a_t\}_t$ para maximizar algún objetivo

$$v_0 = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(x_t, a_t) \right]$$

- Evolución del estado $F(x_{t+1} \mid x_t, a_t)$ se puede afectar con a_t

- Programación dinámica: $v(x) = \max_a U(x, a) + \beta \mathbb{E}\left[v(x')|x, a\right]$ ✓

- Qué pasa si la evolución del estado también depende de $\mathbb{E}_t\left[a_{t+1}\right]$?

Consistencia temporal

Problema

- Elegir acciones $\{a_t\}_t$ para maximizar algún objetivo

$$v_0 = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(x_t, a_t) \right]$$

- Evolución del estado $F(x_{t+1} \mid x_t, a_t)$ se puede afectar con a_t
- Programación dinámica: $v(x) = \max_a U(x, a) + \beta \mathbb{E}\left[v(x')|x, a\right]$ ✓
- Qué pasa si la evolución del estado también depende de $\mathbb{E}_t\left[a_{t+1}\right]$?

Un ejemplo

Un planificador quiere elegir inflación π y producto y para

$$\min_{\{y_t,\pi_t\}_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left((y_t - y^\star)^2 + \gamma \pi_t^2\right)$$

$$\text{sujeto a } \; \pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

dado el nivel deseado $y^\star$

- Multiplicador de Lagrange $2\beta^t \lambda_t$ a la restricción en t
- CPOs:

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1} \qquad (\lambda_t)$$

$$2\beta^t (y_t - y^\star) = \kappa 2\beta^t \lambda_t \qquad (y_t)$$

$$2\beta^t \gamma \pi_t = -2\beta^t \lambda_t + 2\beta^{t-1} \lambda_{t-1} \beta \qquad (\pi_t)$$

Un ejemplo

Un planificador quiere elegir inflación π y producto y para

$$\min_{\{y_t,\pi_t\}_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left((y_t - y^\star)^2 + \gamma \pi_t^2 \right)$$
$$\text{sujeto a } \; \pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

dado el nivel deseado $y^\star$

- Multiplicador de Lagrange $2\beta^t \lambda_t$ a la restricción en t
- CPOs:

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1} \qquad (\lambda_t)$$
$$2\beta^t (y_t - y^\star) = \kappa 2 \beta^t \lambda_t \qquad (y_t)$$
$$2\beta^t \gamma \pi_t = -2\beta^t \lambda_t + 2\beta^{t-1} \lambda_{t-1} \beta \qquad (\pi_t)$$

Un ejemplo

Un planificador quiere elegir inflación π y producto y para

$$\min_{\{y_t,\pi_t\}_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left((y_t - y^\star)^2 + \gamma \pi_t^2\right)$$
$$\text{sujeto a } \pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

dado el nivel deseado $y^\star$

- Multiplicador de Lagrange $2\beta^t \lambda_t$ a la restricción en t
- CPOs:

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1} \qquad (\lambda_t)$$
$$2\beta^t (y_t - y^\star) = \kappa 2\beta^t \lambda_t \qquad (y_t)$$
$$2\beta^t \gamma \pi_t = -2\beta^t \lambda_t + 2\beta^{t-1} \lambda_{t-1} \beta \qquad (\pi_t)$$

Un ejemplo

Un planificador quiere elegir inflación π y producto y para

$$\min_{\{y_t,\pi_t\}_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left((y_t - y^\star)^2 + \gamma \pi_t^2\right)$$
$$\text{sujeto a } \; \pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

dado el nivel deseado $y^\star$

- Multiplicador de Lagrange $2\beta^t \lambda_t$ a la restricción en t
- CPOs:

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1} \tag{λ_t}$$
$$2\beta^t (y_t - y^\star) = \kappa 2 \beta^t \lambda_t \tag{y_t}$$
$$2\beta^t \gamma \pi_t = -2\beta^t \lambda_t + 2\beta^{t-1} \lambda_{t-1} \beta \tag{π_t}$$

Un ejemplo

Un planificador quiere elegir inflación π y producto y para

$$\min_{\{y_t,\pi_t\}_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left((y_t - y^\star)^2 + \gamma\pi_t^2\right)$$
$$\text{sujeto a } \ \pi_t = \kappa y_t + \beta\pi_{t+1}$$

dado el nivel deseado $y^\star$

- Multiplicador de Lagrange $2\beta^t\lambda_t$ a la restricción en t
- CPOs:

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta\pi_{t+1} \qquad (\lambda_t)$$
$$2\beta^t(y_t - y^\star) = \kappa 2\beta^t\lambda_t \qquad (y_t)$$
$$2\beta^t\gamma\pi_t = -2\beta^t\lambda_t + 2\beta^{t-1}\lambda_{t-1}\beta \qquad (\pi_t)$$

Un ejemplo

Un planificador quiere elegir inflación π y producto y para

$$\min_{\{y_t,\pi_t\}_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left((y_t - y^\star)^2 + \gamma\pi_t^2\right)$$

$$\text{sujeto a} \;\; \pi_t = \kappa y_t + \beta\pi_{t+1}$$

dado el nivel deseado $y^\star$

- Multiplicador de Lagrange $2\beta^t\lambda_t$ a la restricción en t
- CPOs:

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta\pi_{t+1} \qquad (\lambda_t)$$

$$2\beta^t(y_t - y^\star) = \kappa 2\beta^t\lambda_t \qquad (y_t)$$

$$2\beta^t\gamma\pi_t = -2\beta^t\lambda_t + 2\beta^{t-1}\lambda_{t-1}\beta \qquad (\pi_t)$$

Un ejemplo bellmanizado

- Qué pasa si Bellmanizamos sin pensar?

$$\mathcal{L} = \min_{\pi,y} (y - y^\star)^2 + \gamma\pi^2 + \beta\mathcal{L}$$

$$\text{sujeto a } \pi = \kappa y + \beta\pi'$$

donde π' es la inflación que esperamos que sea decidida mañana

- CPOs:

$$\pi = \kappa y + \beta\pi' \qquad (\lambda)$$

$$y - y^\star = \kappa\lambda \qquad (y)$$

$$\gamma\pi = -\lambda \qquad (\pi)$$

Un ejemplo bellmanizado

- Qué pasa si Bellmanizamos sin pensar?

$$\mathcal{L} = \min_{\pi,y} (y - y^\star)^2 + \gamma\pi^2 + \beta\mathcal{L}$$

$$\text{sujeto a } \pi = \kappa y + \beta\pi'$$

  donde π' es la inflación que esperamos que sea decidida mañana
- CPOs:

$$\pi = \kappa y + \beta\pi' \qquad (\lambda)$$

$$y - y^\star = \kappa\lambda \qquad (y)$$

$$\gamma\pi = -\lambda \qquad (\pi)$$

7 diferencias

CPOs del problema original

$$
\begin{aligned}
\pi_t &= \kappa y_t + \beta \pi_{t+1} \\
y_t - y^\star &= \kappa \lambda_t \\
\gamma \pi_t &= -\lambda_t + \lambda_{t-1}
\end{aligned}
$$

CPOs del problema recursivo

$$
\begin{aligned}
\pi &= \kappa y + \beta \pi' \\
y - y^\star &= \kappa \lambda \\
\gamma \pi &= -\lambda
\end{aligned}
$$

De dónde sale ese λ_{t-1}?

7 diferencias

CPOs del problema original

$$\begin{aligned} \pi_t &= \kappa y_t + \beta \pi_{t+1} \\ y_t - y^\star &= \kappa \lambda_t \\ \gamma \pi_t &= -\lambda_t + \lambda_{t-1} \end{aligned}$$

CPOs del problema recursivo

$$\begin{aligned} \pi &= \kappa y + \beta \pi' \\ y - y^\star &= \kappa \lambda \\ \gamma \pi &= -\lambda \end{aligned}$$

De dónde sale ese λ_{t-1}?

CPOs del problema original

$$\begin{aligned} \pi_t &= \kappa y_t + \beta \pi_{t+1} \\ y_t - y^\star &= \kappa \lambda_t \\ \gamma \pi_t &= -\lambda_t + \lambda_{t-1} \end{aligned}$$

CPOs del problema recursivo

$$\begin{aligned} \pi &= \kappa y + \beta \pi' \\ y - y^\star &= \kappa \lambda \\ \gamma \pi &= -\lambda \end{aligned}$$

De dónde sale ese λ_{t-1}?

De dónde sale λ_{t-1}?

- En el problema original elijo toda la sucesión de inflaciones
- En la restricción

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

puedo controlar *las tres cosas*

- Así que a tiempo t puedo elegir las expectativas de inflación
- Nash: si quiero expectativas x en t más vale que en $t+1$ ponga $\pi = x$

- En el problema recursivo, los tradeoffs en t sólo reflejan el futuro
    - Perfecto en subjuegos: no puedo hacerte esperar cosas que no voy a tener ganas de hacer

De dónde sale λ_{t-1}?

- En el problema original elijo toda la sucesión de inflaciones
- En la restricción

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

puedo controlar *las tres cosas*

- Así que a tiempo t puedo elegir las expectativas de inflación
- Nash: si quiero expectativas x en t más vale que en $t + 1$ ponga $\pi = x$

- En el problema recursivo, los tradeoffs en t sólo reflejan el futuro
    - Perfecto en subjuegos: no puedo hacerte esperar cosas que no voy a tener ganas de hacer

De dónde sale λ_{t-1}?

- En el problema original elijo toda la sucesión de inflaciones
- En la restricción

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

puedo controlar *las tres cosas*

- Así que a tiempo t puedo elegir las expectativas de inflación
- Nash: si quiero expectativas x en t más vale que en $t+1$ ponga $\pi = x$

- En el problema recursivo, los tradeoffs en t sólo reflejan el futuro
  - Perfecto en subjuegos: no puedo hacerte esperar cosas que no voy a tener ganas de hacer

De dónde sale λ_{t-1}?

- En el problema original elijo toda la sucesión de inflaciones
- En la restricción

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

  puedo controlar *las tres cosas*

- Así que a tiempo t puedo elegir las expectativas de inflación
- Nash: si quiero expectativas x en t más vale que en $t+1$ ponga $\pi = x$

- En el problema recursivo, los tradeoffs en t sólo reflejan el futuro
  - Perfecto en subjuegos: no puedo hacerte esperar cosas que no voy a tener ganas de hacer

λ_{t-1} es la marca de la inconsistencia temporal

- Si $\lambda_{t-1} = 0$
  - *commitment = discreción*
  - (claro que en este caso $\lambda_{t-1} = 0$ es raro)
- A cosas más prácticas:
  - qué pasa si quiero calcular la solución con commitment?
  - Puedo usar métodos recursivos?
  - *Sí!*

λ_{t-1} es la marca de la inconsistencia temporal

- Si $\lambda_{t-1} = 0$
  - *commitment = discreción*
  - (claro que en este caso $\lambda_{t-1} = 0$ es raro)
- A cosas más prácticas:
  - qué pasa si quiero calcular la solución con commitment?
  - Puedo usar métodos recursivos?
  - *Sí!*

λ_{t-1} es la marca de la inconsistencia temporal

- Si $\lambda_{t-1} = 0$
    - *commitment* = *discreción*
    - (claro que en este caso $\lambda_{t-1} = 0$ es raro)
- A cosas más prácticas:
    - qué pasa si quiero calcular la solución con commitment?
    - Puedo usar métodos recursivos?
    - *Sí!*

Cómo bellmanizar un problema inconsistente?

- ‘Commitment $\neq$ discreción’ porque
  - Acciones en t = expectativas en $t-1$ sobre acciones en t
    Nash / rational expectations
  - Beneficio de actuar sobre $\mathbb{E}_{t-1}\left[a_t\right]$
    λ_{t-1} sobre π_t
  - Para lograr ese beneficio, hay que ‘cumplir una promesa’
    por eso se llama commitment

- Solución: meter la promesa por la ventana

Cómo bellmanizar un problema inconsistente?

- ‘Commitment $\neq$ discreción’ porque
  - Acciones en t = expectativas en $t-1$ sobre acciones en t
    Nash / rational expectations
  - Beneficio de actuar sobre $\mathbb{E}_{t-1}[a_t]$
    λ_{t-1} sobre π_t
  - Para lograr ese beneficio, hay que ‘cumplir una promesa’
    por eso se llama commitment

- Solución: meter la promesa por la ventana

Cómo bellmanizar un problema inconsistente?

- Agregueemos una variable de estado *artificial* θ_t
  - … que mida la intensidad de la ganancia por disminuir las expectativas de inflación
  - … que nos permita reintroducir un término λ_{t-1}
- Marcet y Marimon (2019) muestran un método general (primera versión: 1998)
- Vamos a hacerlo de forma artesanal

Cómo bellmanizar un problema inconsistente?

- Agreguemos una variable de estado *artificial* θ_t

  … que mida la intensidad de la ganancia por disminuir las expectativas de inflación

  … que nos permita reintroducir un término λ_{t-1}

- Marcet y Marimon (2019) muestran un método general (primera versión: 1998)
- Vamos a hacerlo de forma artesanal

Cómo bellmanizar un problema inconsistente?

- Agreguemos una variable de estado *artificial* θ_t
  - $\ldots$ que mida la intensidad de la ganancia por disminuir las expectativas de inflación
  - $\ldots$ que nos permita reintroducir un término λ_{t-1}

- Marcet y Marimon (2019) muestran un método general (primera versión: 1998)
- Vamos a hacerlo de forma artesanal

Problema bellmanizado con un θ misterioso

- Agreguémosle una variable nueva al problema que le dé un costo extra al planificador

$$L(\theta) = \max_{\theta'} \min_{\pi, y} (y - y^\star)^2 + \gamma\pi^2 + \theta\pi + \beta L(\theta')$$
$$\text{sujeto a } \; \pi = \kappa y + \beta\pi'$$

- CPOs:

$$\begin{aligned} \pi &= \kappa y + \beta\pi' \\ y - y^\star &= \kappa\lambda \\ \gamma\pi &= -\lambda + \theta/2 \\ \beta L'(\theta') &= 0 \end{aligned}$$

- Cómo nos aseguramos de que $\theta' = \lambda$?

Cómo hacer que $\theta' = \lambda$?

- Usemos la restricción para asegurarnos de que θ mida el costo de la inflación

$$\mathcal{L}(\theta) = \max_{\theta'} \min_{\pi,y} (y - y^\star)^2 + \gamma\pi^2 + 2\theta'(\pi - \kappa y) - 2\theta\pi + \beta\mathcal{L}(\theta')$$

- CPOs:

$$\begin{aligned} y - y^\star &= \theta'\kappa \\ \gamma\pi &= -\theta' + \theta \\ \pi - \kappa y + \beta\mathcal{L}'(\theta')/2 &= 0 \end{aligned}$$

- Restricción de y, π ✓
- Restricción de θ': $\mathcal{L}'(\theta) = -2\pi$ ✓

Cómo hacer que $\theta' = \lambda$?

- Usemos la restricción para asegurarnos de que θ mida el costo de la inflación

$$\mathcal{L}(\theta) = \max_{\theta'} \min_{\pi,y} (y - y^\star)^2 + \gamma\pi^2 + 2\theta'(\pi - \kappa y) - 2\theta\pi + \beta\mathcal{L}(\theta')$$

- CPOs:

$$\begin{aligned} y - y^\star &= \theta'\kappa \\ \gamma\pi &= -\theta' + \theta \\ \pi - \kappa y + \beta\mathcal{L}'(\theta')/2 &= 0 \end{aligned}$$

- Restricción de y, π ✓
- Restricción de θ': $\mathcal{L}'(\theta) = -2\pi$ ✓

Cómo hacer que $\theta' = \lambda$?

- Usemos la restricción para asegurarnos de que θ mida el costo de la inflación

$$\mathcal{L}(\theta) = \max_{\theta'} \min_{\pi, y} (y - y^\star)^2 + \gamma\pi^2 + 2\theta'(\pi - \kappa y) - 2\theta\pi + \beta\mathcal{L}(\theta')$$

- CPOs:

$$\begin{aligned} y - y^\star &= \theta'\kappa \\ \gamma\pi &= -\theta' + \theta \\ \pi - \kappa y + \beta\mathcal{L}'(\theta')/2 &= 0 \end{aligned}$$

- Restricción de y, π ✓
- Restricción de θ': $\mathcal{L}'(\theta) = -2\pi$ ✓

Es fácil de implementar esto?

`rec_infla.jl`

Es fácil de implementar esto?

`rec_infla.jl`

Cierre

Cierre

- Por qué es tan volátil el consumo?
    - en economías emergentes?

- Tres mecanismos:
    - afectan la ecuación de Euler vía
        1. Tasas de interés y riesgo de default
        2. Externalidades de demanda agregada
        3. Movimientos (bruscos) de capital

- Aplicaciones cuantitativas
    - Julia

- Métodos de frontera
    - Los códigos que usamos resuelven modelos de papers modernos
    - Flexibilidad para pensar en otros mecanismos