Macroeconomía Internacional Cuantitativa

Francisco Roldán*

October 2025

a entregar no después del 23 de octubre

1. Problema de la torta

En clase vimos cómo resolver el problema asociado con la ecuación de Bellman

$$v(k) = \max_{k'} u\left(k(1+r) - k'\right) + \beta v(k') \tag{1}$$

1.1 Funciones de consumo

1. Para más práctica graficando: crear un objeto de tipo `CakeEating` con los parámetros por default, resolverlo usando `vfi!` o `vfi_itp!`
2. Usar `scatter` y `plot` para crear un gráfico de la función de consumo `ce.gc` como función del capital
   - Este gráfico no debería ser súper informativo (por qué?)
3. Para mostrar mejor el resultado, graficar c/k como función de k, la fracción de torta consumida como proporción de la torta que queda. (ayuda: usar la división lugar a lugar de dos vectores con el operador `x./y`)
4. También mostrar la función de ahorro `ce.gk` igual que la de consumo, dividiendo por el capital inicial.
   - Algo interesante que notar? Qué pinta tiene c/k (sobre todo, si aumentás la cantidad de puntos y te alejás del cero)?

Modos de resolución – opcional

Dan *exactamente* el mismo resultado los algoritmos con (`vfi_itp!`) y sin (`vfi!`) interpolación? O un toque diferentes? Alguna idea de por qué?

*email: *froldan6@gmail.com*

Para pensar (muy opcional)

Es realmente necesaria la variable de estado k en (1) si la función de utilidad u es homotética (por ejemplo, si es CRRA)? En otras palabras, existe un número $\tilde{v}$ y, tal vez, una función conocida de k (por ejemplo, $k^{1-\gamma}$ o $k^{\gamma-1}$ o $\log(k)$ o algo así) tal que si propongo que $f(k) = \tilde{v}k^{\gamma-1}$ (por caso), entonces la función f satisface la ecuación (1)? Si fuera cierto, de qué dependerían las funciones de valor y decisión v y g_c, g_k? Tiene algo que ver con lo que dijiste antes de cuál es la pinta de $g_c(k)$ como función de k?

Dado que este año hablamos de este tema y sabemos que la función que satisface la ecuación de Bellman (1) es $f(k) = \tilde{v}k^{\gamma-1}$, cómo sería un modo de solución que use esa información? En otras palabras, se puede usar algo tipo VFI para encontrar $\tilde{v}$? Si sí, y lo lograste hacer, cómo quedarían los gráficos que te pido antes con esta solución?

1.2 *Simulador de torta*

Escribir un simulador para el problema de la torta. Para esto

1. Elegir un tiempo máximo T, un estado inicial k_0 (menor o igual que el máximo de la grilla de k del problema `ce` resuelto...).

2. Inicializar dos vectores $\mathcal{C}$ y $\mathcal{K}$ para guardar las sucesiones $\{c_t, k_t\}_{t=0}^{T}$.

3. Inicializar interpoladores para recuperar funciones de consumo y ahorro a partir de los vectores `gc` y `gk`.

4. Para cada $t \in \{0, \ldots, T\}$, como ya sabemos k_t, usar la función de consumo para averiguar c_t y la función de ahorro para averiguar k_{t+1}. Guardar c_t y k_{t+1} como los elementos correspondientes de los vectores que preparamos. Pasar al siguiente t y así hasta llenar los dos vectores.

5. Mostrar el consumo a lo largo del tiempo y la torta que va quedando. Se parece al que vimos en clase?

   - Según tus preferencias, podés mirar el gráfico del consumo como un flujo con un `scatter` simple, como fracción de la torta que queda (por ejemplo usando un gráfico de área apilada), o como flujo acumulado (usando `cumsum` para generar las sumas parciales del vector $\mathcal{C}$). Acordate que podés pasarle un vector de `scatters` (u otros tipos de gráfico) a `plot` para poner múltiples cosas con los mismos ejes.

Observación Como antes, es buena idea meter los pasos 2–4 en una función que tome como argumentos un problema `ce` (ya resuelto), T y k_0, y devuelva los vectores $\mathcal{C}$ y $\mathcal{K}$.

1.3 Momentos para calibrar?

Usando el simulador del punto anterior, se puede calcular cuántos períodos tarda el agente en comerse la mitad de la torta inicial. Cómo cambia esta cantidad con la paciencia β? Podés graficar este tiempo como función de un vector de valores posibles para β. [Como no hay nada aleatorio, con simular una sola vez para cada β alcanza, no?]

2. Fluctuación de ingresos

Al agregar un proceso estocástico para $\{y_t\}_t$, obtenemos un problema de fluctuación de ingresos con ecuación de Bellman

$$v(k, y) = \max_{k' \geq \bar{k}} u(y + k(1 + r) - k') + \beta \mathbb{E}\left[v(k', y') \mid y\right]$$

Límite de deuda natural El límite de deuda natural $\underline{k}$ es el máximo nivel de deuda (menor nivel de capital) que es 'pagable' por el agente (o sea, que si mañana se endeuda otra vez al máximo le alcanza justo, haciendo $c = 0$ para pagar la deuda vieja).

$$\begin{aligned}\underline{k} &= \min_{y'} y' + (1 + r)\underline{k} \\ &= \min_{y'} -\frac{y'}{r}\end{aligned}$$

Fijate que como tenés que hacer $c = 0$ para nada más pagar los intereses de $\underline{k}$, tener que elegir $k \geq \underline{k}$ nunca es una restricción que muerde si las preferencias satisfacen una condición de Inada y la utilidad marginal del consumo se vuelve alta cuando $c \to 0$ (por eso se llama el límite natural).

Igual que charlamos en clase, si uno realmente se cree que $\log y'$ tiene distribución normal (condicional en y), entonces el mínimo y' es 0 y el límite de deuda natural también. Pero si vamos a discretizar la grilla de y (o si pasa alguna otra cosa que nos haga pensar que y está acotado por abajo lejos de 0), entonces el límite natural es un concepto útil.

[Esta sección no es un ejercicio]

2.1 Funciones de consumo

Elegir la forma de mostrar $c(k, y)$ en un modelo resuelto. Ideas posibles (pero no exhaustivo): k en el eje x, distintas líneas para distintos valores de y, usando un vector de `scatters`; curvas de nivel como función de (k, y) usando `contour` (Ojo que `contour` maneja la x y la y medio raro, lo que pongas en el eje z lo considera una matriz con lo cual la primera dimensión es el eje y y la segunda el eje x). Opcional: mostrame $c(k, y)/y$. Cómo cambia la propensión al consumo con el nivel de k?

2.2 *Estáticas comparadas*

Quiero entender el efecto de algunos parámetros sobre la propensión al ahorro. Vamos a mover la tasa de interés r y la volatilidad del ingreso σ_y y graficar la función de consumo como función del ingreso y el parámetro que estemos moviendo, dejando la riqueza en 0 (para no complicar el gráfico).

Modo sugerido

1. Fijar un vector $\mathcal{R}$ para los valores de r (o un vector Σ para los valores de σ_y). Por ejemplo un `range` entre 0.01 y 0.04 con largo N_r (por ejemplo 10, si querés podés poner más puntos pero va a tardar más, pensá que tenemos que resolver un modelo cada vez).

2. Preparar un vector para guardar los `scatters` de largo N_r
(haciendo `pv = Vector{AbstractTrace}(undef, Nr)` para que después lo pueda tomar `plot`).

3. Para cada $x \in \mathcal{R}$:

   - Preparar un modelo `IFP` con $r = x$.
   - Resolver el modelo con `vfi!`.
   - En el elemento correspondiente del vector `pv`, guardar el `scatter` de $g_c(0, y)$ contra y, para y en la grilla de posibles valores `ygrid` (acá podés usar `findfirst` para encontrar el punto de la grilla de k más cercano a 0, o asegurarte en el constructor de que 0 sea un elemento de la grilla, o elegir un punto de la grilla, tal vez que no sea 0, para hacer los gráficos; lo importante es que al variar modelos el k sea siempre el mismo). Al crear estos `scatters`, podés usar la opción `name` para ir referenciando cuál es el valor de r en cada caso e ir armando la leyenda del gráfico.
     - Podés elegir graficar $g_c(0, y)$ así como viene o $g_c(0, y)/y$ para ver la fracción del ingreso consumido o $g_c(0, y) - y$ para ver más claro cuándo ahorrás y cuánto.

4. Finalmente, usar `plot` sobre `pv` para mostrar todo junto. Cómo afectan las condiciones de crédito al consumo del agente, aún cuando no tiene deuda?

Repetir todos estos pasos para mover σ_y (por ejemplo entre 0.01 y 0.05 si el valor original es 0.025). *Nota*: fijate que este método de ir creando los `scatters` 'localmente' permite que cada uno de los gráficos tenga un eje x distinto, lo cual nos viene bien porque al cambiar σ_y va a cambiar la grilla `ygrid`. Deberías poder notarlo en el gráfico al poner todo junto.