Macroeconomía Internacional Cuantitativa

Francisco Roldán*

October 2025

a entregar antes de la clase del 30 de octubre

1. Deuda con default (Arellano)

En clase vimos el problema de un soberano que emite deuda defaulteable a un conjunto de inversores extranjeros. El soberano toma como dada una función $q(b', y)$, que dice a qué precio puede colocar una cantidad de deuda b' cuando el nivel de ingreso de hoy es y, y resuelve

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(b, y) &= \max\left\{v^R(b, y) + \varepsilon_R, v^D(y) + \varepsilon_D\right\} \\ v^R(b, y) &= \max_{b'} u(y - b + q(b', y)b') + \beta\mathbb{E}\left[\mathcal{V}(b', y') \mid y\right] \\ v^D(y) &= u(h(y)) + \beta\mathbb{E}\left[\psi\mathcal{V}(0, y') + (1-\psi)v^D(y') \mid y\right] \end{aligned}$$

donde los shocks ε_i son *iid* entre sí y entre períodos con distribución de valor extremo tipo 1 con parámetro de escala χ, de modo que $\varepsilon_R - \varepsilon_D$ tiene distribución logística con parámetro χ. Esto da lugar a expresiones explícitas para la probabilidad de default *ex-post* $\mathcal{P}(b, y)$ y la función de valor

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(b, y) &= \frac{\exp(v^D(y)/\chi)}{\exp(v^R(b, y)/\chi) + \exp(v^D(y)/\chi)} \\ \mathcal{V}(b, y) &= \chi \log\left(\exp(v^D(y)/\chi) + \exp(v^R(b, y)/\chi)\right) \end{aligned}$$

Los acreedores extranjeros son neutrales al riesgo y descuentan el futuro a tasa $\frac{1}{1+r}$, así que para que estén dispuestos a comprar un bono, tiene que ser que el repago esperado descontado sea igual al precio de venta

$$q(b', y) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}\left[1 - d(b', y') \mid y\right] = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}\left[1 - \mathcal{P}(b', y') \mid y\right]$$

*email: *froldan6@gmail.com*

1.1 *Regiones de repago y default*

Usando un modelo resuelto con los parámetros por default, mostrame con un `contour` la probabilidad de default como función de y y b. Cuándo es más riesgosa la deuda?[1]

Opcional Qué pasa con la región de default cuando variás la paciencia del deudor β o el costo de default (por ejemplo variando Δ en el caso de costos lineales). Una forma de mostrar esto es, para cada modelo, como función de y, encontrar el nivel de deuda $b^\star(y)$ para el cual la probabilidad de default $\mathcal{P}(b, y)$ cruza 50% (podés usar `findfirst` sobre el vector `dd.prob[:,jy]` para dado y o interpolar y encontrarle un mínimo a la función $b \mapsto (\mathcal{P}(b, y) - 0.5)^2$). Una vez calculado todo esto, podés poner en el mismo gráfico las funciones $b^\star(y)$ que correspondan a cada modelo y comparar dónde están.

1.2 *Opcional – Mecánica de los shocks de preferencias*

Para ver cómo χ afecta al equilibrio (además de a la resolución del modelo), vamos a resolver el mismo modelo con distintos valores de χ. En `arellano.jl` el constructor que yo escribí tiene por default $\chi = 0.01$. Te voy a pedir que resuelvas el modelo para $\chi \in \{0.0001, 0.1\}$.

Para cada resolución, en el mismo gráfico quiero ver las tres funciones de valor, $\mathcal{V}$, v^R, v^D, como función del nivel de deuda b.[2] Lo importante es que se crucen v^R y v^D cosa de que podamos ver el efecto del default (si $v^R > v^D$ en todo el gráfico, es que la opción de defaultear no vale nada). Para los parámetros que estamos usando, podés lograr eso fijando $y = 1$ (o sea, usando el índice de la grilla de y que tenga el valor más cercano a 1 posible, debería ser justo el medio de la grilla).

Podés poner los gráficos uno al lado del otro (variando χ) o rebuscártelas para poner toda la información en un solo gráfico. Pero quiero que notes dos cosas: primera, cómo cambia la relación entre $\mathcal{V}$ y v^R y v^D cuando χ se hace más grande, y por qué? Segunda, mirá los valores en el eje y. Los niveles son de utilidad así que no representan nada, pero es lo mismo cuánto es χ para el valor de este agente? Las v^R como v^D son iguales o distintas cuando cambiás χ? Por qué pasa eso?

1.3 *Cuántos defaults son por los precios?*

El gobierno en el modelo de default (y, capaz, en la realidad también) en muchos casos diría que terminó haciendo un default porque los precios eran desfavorables (o sea, que si le permitían hacer rollover de la deuda con términos más razonables sí habría podido pagar). Vamos a investigar un poco esta dinámica en

[1] No te olvides que `contour` invierte los ejes x e y. Para graficar $f(x, y)$ como que naturalmente identificamos el primer argumento con el eje horizontal, pero pensando en una matriz A_{xy}, la primera componente es el 'eje' vertical, como que `A[:,jy]` es un vector columna y `A[jx,:]` es una fila.

[2] Ojo, la función v^D no depende del nivel de deuda, así que para graficarla y hacer la comparación tenés dos opciones. Opción 1: meterte en la documentación de PlotlyJS y usar `shapes` para agregar una línea horizontal al gráfico. Opción 2: multiplicar $v^D(y)$ por un vector de unos del largo de `bgrid` para que te quede algo que puedas graficar como función de b.

el modelo que tenemos. Para esto, quiero que armes la siguiente solución fuera de expectativas racionales: hacé que el precio de los bonos sea consistente con que el gobierno siempre repague, y resolvé el modelo (permitiéndole al gobierno elegir si paga o no) pero enfrentando esos precios. Una sugerencia es armarte una función parecida a la `mpe!` pero que no haga el paso de actualizar los precios. Una vez hecho esto, dibujá la región de default del modelo original (con precios de equilibrio que reflejan la probabilidad de default) y la del modelo con estos otros precios. Son distintas, es una de las dos un subconjunto de la otra? Hay defaults que sólo ocurren porque enfrentás malos precios?

Nota Acá es muy útil usar las funciones $b^\star(y)$ del punto opcional 1.1.

Nota Una cosa que vamos a hablar la vez que viene es como ver en la simulación cuántos defaults son "por los precios."